Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Dualbasen und Determinante

Dieses Blatt dient **nicht zur Abgabe**, jedoch zum Üben von klausurrelevantem Stoff

Aufgabe 1.1

Gegeben seien die folgenden linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dualbasis zu (u_1, u_2, u_3), d.h., die linearen Abbildungen $f_i \in (\mathbb{R}^{3\times 1})^*$ mit $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Lösung. **Allgemeines Vorgehen:** Seien $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ linear unabhängige Vektoren. Wissen: jedes lineare Funktional $f \in (\mathbb{R}^{n\times 1})^*$ ist eindeutig bestimmt durch Zahlen $A_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit

$$f : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}, \quad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k.$$

Für alle $i = 1, \ldots, n$ suchen wir also $A_{ki} \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit

$$f_i(u_j) = A_{1i}(u_j)_1 + \ldots + A_{ni}(u_j)_n = \delta_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Für jedes i erhalten wir so ein System von n Gleichungen in den Unbekannten $A_{1i}, \ldots, A_{ni}$. Die Gleichungen (1) können wir zusammenfassen zu

$$\begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} = e_i. \tag{2}$$

Da $u_1, \ldots, u_n$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, ist $\begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}$ invertierbar. D.h. (2) ist eindeutig lösbar und wir erhalten die Koeffizienzen A_{ki} $(k = 1, \ldots, n)$ zum Beispiel durch Gauß-Elimination. Es geht aber noch eleganter und schneller :-)

Die Koeffizienten von f_i sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}^{-1} \cdot e_i.$$

Bemerkung: $\begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}^{-1} \cdot e_i$ ist die i-te Spalte von $\begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}^{-1}$, d.h. um die Dualbasis von $(u_1, \ldots, u_n)$ zu berechnen, müssen wir nur $\begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}$ invertieren und können die Koeffizienten in den Spalten ablesen :-)

In Aufgabe 1.1: Die Elemente $f_i \in (\mathbb{R}^{3\times 1})^*$ $(i = 1, 2, 3)$ der Dualbasis sind gegeben durch

$$f_i : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = f_{1i}x_1 + f_{2i}x_2 + f_{3i}x_3,$$

wobei die Koeffizienten $f_{ki} \in \mathbb{R}$ $(k, i = 1, 2, 3)$ eindeutig bestimmt sind durch $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ bzw. durch

$$\begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \end{pmatrix}^{-1} \cdot e_i.$$

Bestimmen der Inversen liefert

$$\begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$f_1 : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, \quad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \frac{1}{6}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3,$$

$$f_2 : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, \quad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_3,$$

$$f_3 : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}, \quad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}x_1.$$

Aufgabe 1.2

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Sei $U_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n-1\times n-1}(K)$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Zeigen Sie, dass U_{ij} für $i < j$ eine obere Dreiecksmatrix ist und mindestens ein Diagonaleintrag gleich 0 ist. Folgern Sie, dass $\det(U_{ij}) = 0$ für $i < j$.

Lösung. Schreibe $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $U \coloneqq U_{ij} = (u_{k\ell})_{k,\ell=1,\ldots,n-1}$. Da U aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, ist (diesen Schritt klar machen)

$$u_{k\ell} = \begin{cases} a_{k\ell}, & \text{falls } k \leq i-1 \text{ und } \ell \leq j-1, \\ a_{k+1,\ell}, & \text{falls } k \geq i \text{ und } \ell \leq j-1, \\ a_{k,\ell+1}, & \text{falls } k \leq i-1 \text{ und } \ell \geq j, \\ a_{k+1,\ell+1}, & \text{falls } k \geq i \text{ und } \ell \geq j. \end{cases}$$

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, ist $a_{k\ell} = 0$ für alle $k > \ell$. Wir erhalten daher $u_{k\ell} = 0$ in folgenden Fällen

(1) $k > \ell$ und $k < i$ und $\ell < j$.
(2) $k + 1 > \ell$ und $k \geq i$ und $\ell < j$.
(3) $k > \ell + 1$ und $k < i$ und $\ell \geq j$.
(4) $k + 1 > \ell + 1$ und $k \geq i$ und $\ell \geq j$. Dies ist äquivalent zu: $k > \ell$ und $k \geq i$ und $\ell \geq j$

Wegen $i < j$ nach Voraussetzung kann Fall (3) nicht auftreten. Mittels Fallunterscheidung (diesen Schritt klar machen) folgt $u_{k\ell} = 0$ für alle $k > \ell$. Mit Fall (2) folgt insbesondere für $k = \ell = i$, wegen $\ell = i < j$ auch $u_{ii} = 0$. Damit ist U eine obere Dreiecksmatrix mit $u_{ii} = 0$. Außerdem ist mit der Formel für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix (siehe Vorlesung) $\det(U_{ij}) = \det(U) = \prod_{k=1}^{n-1} u_{kk} = u_{ii} \cdot \prod_{k=1,k\neq i}^{n-1} u_{kk} = 0$

Aufgabe 1.3

Sei K ein Körper und sei $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$. Sei $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$ eine Matrix, die aus A durch eine elementare Zeilenumformung von Typ 1 hervorgeht, und entsprechend $C, D \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$ für Typ 2, bzw. Typ 3. Zeigen Sie:

(a) $\det B = -\det(A)$
(b) $\det C = \lambda \det(A)$, wobei λ den Skalar bezeichnet, mit dem wir eine Zeile von A multipliziert haben.
(c) $\det D = \det(A)$

Lösung. Schreibe $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,2,3}$.

(a) Betrachte eine Typ I Umformung, die die Zeilen $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}, i_1 \neq i_2$ vertauscht. Ohne Einschränkung sei $i_1 < i_2$. Entwicklung von $\det(B)$ nach der i_3-ten Zeile, mit $i_3 \in \{1,2,3\}\backslash\{i_1, i_2\}$ liefert:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (-1)^{i_3+1} a_{i_3 1} \begin{vmatrix} a_{i_2 2} & a_{i_2 3} \\ a_{i_1 2} & a_{i_1 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i_3+2} a_{i_3 2} \begin{vmatrix} a_{i_2 1} & a_{i_2 3} \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i_3+3} a_{i_3 3} \begin{vmatrix} a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i_3+1} a_{i_3 1} \left(a_{i_2 2} a_{i_1 3} - a_{i_1 2} a_{i_2 3}\right) + (-1)^{i_3+2} a_{i_3 2} \left(a_{i_2 1} a_{i_1 3} - a_{i_1 1} a_{i_2 3}\right) + (-1)^{i_3+3} a_{i_3 3} \left(a_{i_2 1} a_{i_1 2} - a_{i_1 1} a_{i_2 2}\right) \\
&= -\Big((-1)^{i_3+1} a_{i_3 1} \left(a_{i_1 2} a_{i_2 3} - a_{i_2 2} a_{i_1 3}\right) + (-1)^{i_3+2} a_{i_3 2} \left(a_{i_1 1} a_{i_2 3} - a_{i_2 1} a_{i_1 3}\right) + (-1)^{i_3+3} a_{i_3 3} \left(a_{i_1 1} a_{i_2 2} - a_{i_2 1} a_{i_1 2}\right)\Big) \\
&= \det(A),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt analog durch Entwicklung von $\det(A)$ nach der i_3-ten Zeile folgt.

(b) Betrachte eine Typ II Umformung, bei der die i-te Zeile ($i \in \{1,2,3\}$) mit λ multipliziert wird. Seien $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}\backslash\{i\}$ mit $i_1 < i_2$ die beiden anderen Zeilen. Entwicklung von $\det(C)$ nach der i-ten Zeile liefert

$$\det(C) = (-1)^{i+1}(\lambda a_{i1}) \begin{vmatrix} a_{i_1 2} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 2} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}(\lambda a_{i2}) \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i+3}(\lambda a_{i3}) \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix}$$
$$=\lambda \left((-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{i_1 2} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 2} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i+3} a_{i3} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix} \right)$$
$$=\lambda \det(A),$$

wobei der letzte Schritt wiederum durch Entwicklung von $\det(A)$ nach der i-ten Zeile folgt.

(c) Ähnlich wie Teil (a): Betrachte eine Typ III Umformung, die das λ-fache der i_1-ten Zeile zur i_2-ten Zeile addiert mit $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}, i_1 \neq i_2$. Ohne Einschränkung sei $i_1 < i_2$, andernfalls wende eine Typ I Umformung auf die Zeilen i_1 und i_2 von A und D an, erhalte so Matrizen A' und D', zeige $\det(D') = \det(A')$ und folgere die Behauptung mit Teil (a). Entwicklung von $\det(D)$ nach der i_3-ten Zeile, mit $i_3 \in \{1,2,3\}\backslash\{i_1, i_2\}$ liefert:

$$\det(D) = (-1)^{i_3+1} a_{i_3 1} \begin{vmatrix} a_{i_1 2} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 2} + \lambda a_{i_1 2} & a_{i_2 3} + \lambda a_{i_1 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i_3+2} a_{i_3 2} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 1} + \lambda a_{i_1 1} & a_{i_2 3} + \lambda a_{i_1 3} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{i_3+3} a_{i_3 3} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} + \lambda a_{i_1 1} & a_{i_2 2} + \lambda a_{i_1 2} \end{vmatrix}.$$

In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass für eine 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{vmatrix} \quad \text{(nachrechnen).}$$

Damit folgt

$$\det(D) = (-1)^{i_3+1} a_{i_3 1} \begin{vmatrix} a_{i_1 2} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 2} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i_3+2} a_{i_3 2} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 3} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 3} \end{vmatrix} + (-1)^{i_3+3} a_{i_3 3} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix} = \det(A),$$

wobei der letzte Schritt durch Entwicklung von $\det(A)$ nach der i_3-ten Zeile folgt.